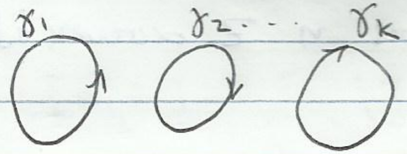
## ΑΛΥΣΙΔΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ:

Είναι το σύνολο $C=\{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k\}=\gamma_1+\dots+\gamma_k$




## ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ:

Έστω $f:\tau\to\mathbb{C}$ με $\tau\subseteq\mathbb{C}$

$z\in\tau$ : $z=x+iy$

$f(z)=f(x+iy)\in\mathbb{C}=u+iv$

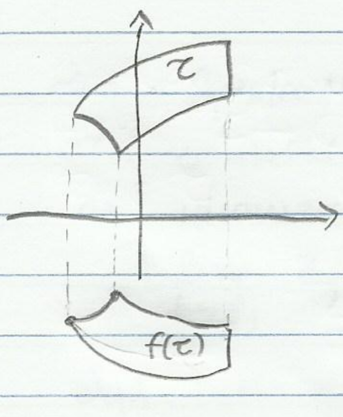
όπου $u=\mathrm{Re}\,f(x+iy)$ και $v=\mathrm{Im}\,f(x+iy)$

Άρα, $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$

Έτσι, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ , $(x,y) : x+iy=z\in\tau$

Π.χ

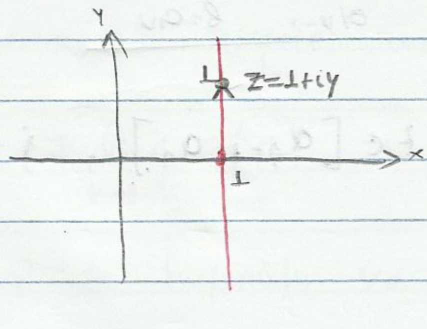
Έστω $f(z)=\bar{z}$



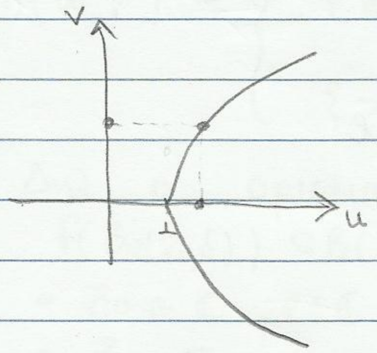

Έστω $f(z)=z|z|$ με $z=1+iy$

$f(z)=(1+iy)|1+iy|=\sqrt{1+y^2}+iy\sqrt{1+y^2}$

Έτσι, $u=\sqrt{1+y^2}$ & $v=y\sqrt{1+y^2}$



Εάν $\frac{v}{u} = y \Rightarrow u = \sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}} \overset{u>0}{\Longrightarrow} u^2 = \sqrt{u^2+v^2} \Rightarrow u^4 = u^2 + v^2$



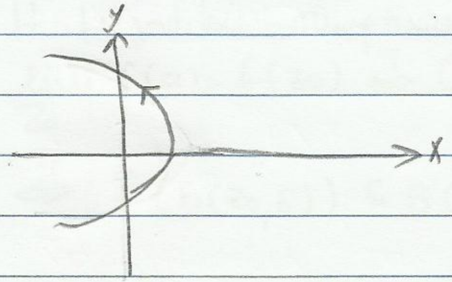

για $y = 1$ $\quad u = \sqrt{2}$ και $v = \sqrt{2}$

Έστω $f(z) = z^2$ με $z = 1 + iy$

$f(z) = (1+iy)^2 = 1 - y^2 + 2iy \Rightarrow u = 1 - y^2, \; v = 2y$

$u^2 + v^2 = (1+y^2)^2 \Longrightarrow \sqrt{u^2+v^2} = 1 + y^2$

Έτσι, $\sqrt{u^2+v^2} + u = 2 \Rightarrow \sqrt{u^2+v^2} = 2 - u \Rightarrow v^2 = 4 - 4u \Rightarrow u = -\frac{1}{4}v^2 + 1$




Αν $\tau = (a, b) = \{ x + i0 , \; x \in (a, b) \}$ δεν αποτελεί τόπο

Όριο συνάρτησης στο μιγαδικό επίπεδο:

για $z_0 \in \tau$ $\quad \lim_{z_0} f = \ell \in \mathbb{C}$ αν.ν

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$

δηλ. αν $z \in B_0(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in B(\ell, \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(B_0(z_0, \delta)) \subseteq B(\ell, \varepsilon)$

Πχ

$f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$, $z \neq 0$

Γνωρίζουμε ότι $\forall z_\nu \to z_0$ & $z_\nu \neq z_0 \Rightarrow f(z_\nu) \to \ell$

Έστω λοιπόν η ακολουθία

$z_n = \frac{1}{n} + 0i$, $n = 1, 2, \dots$ με $z_n \to 0$

Αλλά

$$\lim_\nu f(z_n) = \lim_\nu \frac{\frac{1}{n} - 0i}{\frac{1}{n} + 0i} = 1$$

$z_n' = 0 + i\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, $z_n' \to 0$

Αλλά

$$\lim_\nu f(z_n') = \lim_\nu \frac{0 - i\frac{1}{n}}{0 + i\frac{1}{n}} = -1$$

$\neq$

Άρα, $\nexists \lim_{z_0} f(z)$

Ομοια για την $f'(z) = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$, $z \neq 0$

για $z_n = \frac{1}{n} + i0 \Rightarrow \lim f(z_n) = 1$

για $z_n' = \frac{1}{n}(1+i) \Rightarrow \lim f(z_n') = -1$

$\neq$

Άρα, $\nexists \lim_{z_0} f'(z)$

Αλγεβρα Ορίων:

$f, g : \tau \to \mathbb{C}$

$z_0 \in \tau$ : $\lim_{z_0}(f \pm g) = \lim_{z_0} f \pm \lim_{z_0} g$

$\lim_{z_0}(f \cdot g) = \lim_{z_0} f \cdot \lim_{z_0} g$

$\lim_{z_0}(f/g) = \dfrac{\lim_{z_0} f}{\lim_{z_0} g}$, $\lim_{z_0} g \neq 0$

$$B(w,r) = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : |z-w| < r \,,\; w \in \mathbb{C}\} \\ \{z \in \mathbb{C} : w = \infty \,,\; \frac{1}{|z|} < r \text{ ή } \frac{1}{r} < |z|\} \end{cases}$$

Δηλ. ο ορισμός

$f(B_0(z_0,\delta)) \subseteq B(\ell,\varepsilon)$ καλύπτει τις περιπτώσεις

- $z_0 \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{C}$ : $|z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$
- $z_0 \in \mathbb{C}$, $\ell = \infty$ : $|z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$
- $z_0 = \infty$, $\ell \in \mathbb{C}$ : $|z| > 1/\delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$
- $z_0 = \infty$, $\ell = \infty$ : $|z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z)| > 1/\varepsilon$

Συνέχεια:

Η μιγαδική συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $z_0 \in A$ αν

$\lim_{z_0} f(z) = f(z_0) \overset{op}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \mathcal{T}) \, |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

$\overset{op}{\Leftrightarrow} f(B(z_0,\delta)) \subseteq B(f(z_0),\varepsilon)$

Επίσης,

$f$ συνεχής στο $\mathcal{T} \overset{op}{\Leftrightarrow} (\forall B \subseteq \mathbb{C})$ $B$ ανοιχτό : $f^{-1}(B)$ ανοιχτό

ΠΧ

Έστω $A = \{z \in \mathbb{C} : 2|z|^{10} < |z|^5 + 3\}$

Ό.δ.ο $A$ ανοιχτό και φραγμένο

Έστω $f(z) = 2|z|^{10} - |z|^5 + 3 < 0$

Έστω $h(z) = |z|$

$z_\nu \to z_0$ : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0)\; \nu \geq \nu_0 : |z_\nu - z_0| < \varepsilon$

αλλά $\underbrace{||z_\nu| - |z_0||} \leq |z_\nu - z_0| < \underset{\sim}{\varepsilon} \Rightarrow |z_\nu| \to |z_0|$

Δηλ. $h$ συνεχής.

Άρα, $f$ συνεχής των $A = f^{-1}(-\infty, 0)$

αλλά $(-\infty, 0)$ ανοιχτό $\Rightarrow f^{-1}(-\infty,0)$ ανοιχτό

Έστω A μη φραγμ. τότε $(\forall \nu)(\exists z_\nu): |z_\nu| > \nu$

άρα $2|z_\nu|^{10} < |z_\nu|^5 + 3 \Rightarrow 2 < \dfrac{1}{|z_\nu|^5} + \dfrac{3}{|z_\nu|^{10}} < \dfrac{1}{\nu^5} + \dfrac{3}{\nu^{10}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 < \lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{1}{\nu^5} + \lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{3}{\nu^{10}} = 0$ Άτοπο

Άρα, το A φραγμένο

Πρόταση

Η συνάρτηση $f(z) = \mathrm{Arg}\, z$, $z \neq 0$ με σύνολο τιμών $(-\pi, \pi]$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z + |z| = 0\}$

Πρόβλημα

Να βρεθεί το σύνολο των σημείων όπου η συνάρτηση $f(z) = \mathrm{Arg}(1 - z^2)$

ΛΥΣΗ

Έστω $J = 1 - z^2$

$J + |J| = 1 \Rightarrow 1 - z^2 + |1 - z^2| = 0$ ①

Θέτω $z = x + yi$

άρα ① είναι

$1 - x^2 + y^2 - 2ixy + |1 - x^2 + y^2 - 2ixy| = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } y = 0 \\ 1 - x^2 + y^2 + |1 - x^2 + y^2| \end{cases}$

για $y = 0 \rightsquigarrow 1 - x^2 = -|1 - x^2| \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1$

$\Rightarrow x > 1$ ή $x < -1$

Η f ασυνεχής στο $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

## Διαφορισιμότητα

Έστω $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ και τυχόν $z_0 \in \mathcal{U}$ θα λέγεται διαφορίσιμη στο $z_0 \in \mathcal{U}$ αν $\exists \lim\limits_{z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ή όμοια να $\exists \lim\limits_{z_0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ και είναι μιγαδικός αριθμός

και συμβολίζεται με $f'(z_0)$ ή $f'(z)\big|_{z=z_0}$

Πχ

$f(z)=\bar{z}$ συνεχής

τότε παίρνουμε το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} = \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} \overset{z-z_0=h}{=\!=} \frac{\bar{h}}{h}$$

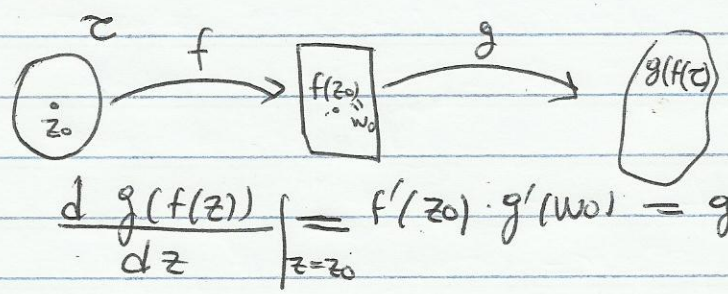
όπου είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι:

$\nexists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\bar{h}}{h}$ άρα $f(z)=\bar{z}$ δεν είναι παραγωγ.

## ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΗΛΙΚΟΥ-ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(f/g)' = \dfrac{f'g - g'f}{f^2}$

## Σύνθεση / Κανόνας Αλυσίδας




$$\frac{d\, g(f(z))}{dz}\bigg|_{z=z_0} = f'(z_0)\, g'(w_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Επίσης αν $f: \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $g: f(\mathcal{T}) \to \mathbb{C}$ είναι δύο συναρτήσεις των $g(f(z)) = z$

τότε

$$1 = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \Rightarrow f^{-1}(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$